

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Ребковец Ольга Александровна  
Должность: И.о. ректора  
Дата подписания: 01.11.2023 16:19:49  
Уникальный программный ключ:  
e789ec8739030382afc5ebff702928ad11af5c0

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга»

Рассмотрено и утверждено на заседании  
кафедры информатики и математики  
14.05.2023 г., протокол №9  
Зав. кафедрой \_\_\_\_\_ И.А. Кашутина

## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ (КУРСА, МОДУЛЯ)

### *ФТД.02 «Интегральные уравнения»*

**Направление подготовки:** 01.03.02 Прикладная математика и информатика

**Профиль подготовки:** общий

**Год набора:** 2023

**Квалификация выпускника:** бакалавр

**Форма обучения:** очная

**Курс 3      Семестр 6**

**Зачет:** 6 семестр

Петропавловск-Камчатский, 2023 г.

Рабочая программа составлена с учетом требований федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 01.02 Прикладная математика и информатика, утвержденного Приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 10.01.2018 № 9.

Разработчик:

Доцент кафедры математики и физики \_\_\_\_\_ Р.И. Паровик

## СОДЕРЖАНИЕ

## 1. Цель и задачи освоения дисциплины

*Целью освоения дисциплины* является изучение однородных и неоднородных линейных интегральных уравнений и их свойств, на основе которых создаются математические модели физических явлений и законов в линейном приближении; изучение понятия функционала и его свойств, представляющих собой математическую основу фундаментальных физических законов.

*Задачи освоения дисциплины:* : изучение и овладение методами решения интегральных уравнений; изучение понятия функционала; изучение методов и приемов математических доказательств теорем и утверждений; формирование у студентов умений и навыков самостоятельного приобретения и применения знаний при исследовании и построении математических моделей; овладение студентами знаний по применению интегральных уравнений и вариационного исчисления в различных разделах физики при исследовании физических явлений.

## 2. Место дисциплины в структуре ОП ВО

Дисциплина относится к блоку Б1 дисциплин базовой части учебного плана. Для освоения данной дисциплины студент должен обладать знаниями по следующим дисциплинам: «Математический анализ», «Линейная алгебра», «Векторный и тензорный анализ», «Дифференциальные уравнения», «Теоретическая механика», «Интегральные преобразования», «Функциональный анализ», «Численные методы».

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО по данному направлению подготовки:

| Наименование категории (группы) компетенций                       | Код и наименование компетенции                                                                                             | Индикаторы достижения универсальных компетенций                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|-------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Теоретические и практические основы профессиональной деятельности | ОПК-3. Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности | ОПК-3.1. Знает классические математические модели, применяемые в различных областях человеческой деятельности.<br>ОПК-3.2. Умеет модифицировать классические математические модели для решения конкретных задач профессиональной деятельности.<br>ОПК-3.3. Имеет опыт применения методов математического моделирования для решения конкретных задач профессиональной деятельности. |

## 4. Содержание дисциплины

Тема №1. Уравнения Вольтерра I рода. Однородные и неоднородные. Методы решения.

Тема №2. Уравнения Фредгольма I рода. Однородные и неоднородные. Методы решения.

Тема №3. Уравнения Вольтерра II рода. Резольвента уравнения Вольтерра II рода, повторные ядра для этого случая. Интегральное уравнение Вольтерра I рода. Сведение его к уравнению II рода. Сведение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения n-порядка к уравнению Вольтерра II рода.

Тема №4. Уравнения Фредгольма II рода. Определение собственного значения и собственной функции ядра интегрального уравнения. Операторная форма интегрального уравнения. Аналогия между линейным интегральным уравнением и системой линейных алгебраических уравнений. Однородное уравнение Фредгольма II рода с вырожденным ядром. Сведение его решения к решению системы алгебраических уравнений. Теорема о конечном числе собственных значений вырожденного ядра (с доказательством). Неоднородное уравнение Фредгольма II рода с вырожденным ядром. Определитель Фредгольма, сопряженное к данному интегральное уравнение

Тема №5. Приближенные методы решения интегральных уравнений. Метод последовательных приближений для решения ИУ. Теорема о существовании и единственности решения ИУ в случае достаточной малости параметра  $\lambda$  (с доказательством на основании теоремы о неподвижной точке оператора). Интегральные преобразования.

## 5. Тематическое планирование

| № | Наименование модуля    | Модули дисциплины |                    |              | Сам. работа | Всего, часов |
|---|------------------------|-------------------|--------------------|--------------|-------------|--------------|
|   |                        | Лекции            | Практики/ семинары | Лабораторные |             |              |
| 1 | Интегральные уравнения | 10                | 10                 | 0            | 52          | 72           |
|   | Всего                  | 10                | 10                 | 0            | 52          | 72           |

### Тематический план

| № темы | Тема                                                                       | Кол-во часов | Компетенции по теме |
|--------|----------------------------------------------------------------------------|--------------|---------------------|
|        | <i>Лекции</i>                                                              |              |                     |
| 1      | Уравнения Вольтерра I рода                                                 | 2            | ОПК-3               |
| 2      | Уравнения Фредгольма I рода                                                | 2            | ОПК-3               |
| 3      | Уравнения Вольтерра II рода                                                | 2            | ОПК-3               |
| 4      | Уравнения Фредгольма II рода                                               | 2            | ОПК-3               |
| 5      | Приближенные методы решения интегральных уравнений                         | 2            | ОПК-3               |
|        | <i>Практические занятия</i>                                                |              |                     |
| 1      | Решение уравнения Вольтерра. Резольвента интегрального уравнения Вольтерра | 2            | ОПК-3               |
| 2      | Интегральные уравнения Фредгольма                                          | 2            | ОПК-3               |

|                               |                                                                         |   |       |
|-------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|---|-------|
| 3                             | Применение интегральных преобразований к решению интегральных уравнений | 2 | ОПК-3 |
| 4                             | Интегральные уравнения: 1-го рода                                       | 2 | ОПК-3 |
| 5                             | Приближенные методы решения интегральных уравнений                      | 2 | ОПК-3 |
| <i>Самостоятельная работа</i> |                                                                         |   |       |
| 1                             | Метод последовательных приближений для решения ИУ.                      |   | ОПК-3 |
| 2                             | Резольвента.                                                            |   | ОПК-3 |
| 3                             | Уравнение Вольтерра II рода.                                            |   | ОПК-3 |
| 4                             | Резольвента уравнения Вольтерра II рода.                                |   | ОПК-3 |
| 6                             | Случай ИУ Фредгольма II рода с симметричным ядром.                      |   | ОПК-3 |

## 6. Самостоятельная работа

Самостоятельная работа включает две составные части: аудиторная самостоятельная работа и внеаудиторная.

Самостоятельная аудиторная работа включает выступление по вопросам практических занятий, выполнение практических заданий.

Внеаудиторная самостоятельная работа студентов заключается в следующих формах:

- выполнение практических заданий;
- подготовка сообщений по вопросам практических занятий.

### 6.1. Темы практических занятий

Практическая работа №1. Решение уравнения Вольтерра. Резольвента интегрального уравнения Вольтерра

Практическая работа №2. Интегральные уравнения Фредгольма

Практическая работа №3. Применение интегральных преобразований к решению интегральных уравнений

Практическая работа №4. Интегральные уравнения: 1-го рода

Практическая работа №5. Приближенные методы решения интегральных уравнений

### 6.2. Внеаудиторная самостоятельная работа

| № п/п | Наименование раздела   | Наименование темы                                  | Форма СР          | Трудоемкость (час.) |
|-------|------------------------|----------------------------------------------------|-------------------|---------------------|
| 1     | Интегральные уравнения | Метод последовательных приближений для решения ИУ. | Конспект, решение | 10                  |

|       |                                                       |                               |    |
|-------|-------------------------------------------------------|-------------------------------|----|
|       |                                                       | задач                         |    |
| 2     | Резольвента.                                          | Конспект,<br>решение<br>задач | 8  |
| 3     | Уравнение Вольтерра II рода.                          | Конспект,<br>решение<br>задач | 10 |
| 4     | Резольвента уравнения<br>Вольтерра II рода.           | Конспект,<br>решение<br>задач | 8  |
| 5     | Случай ИУ Фредгольма II рода с<br>симметричным ядром. | Конспект,<br>решение<br>задач | 8  |
| 6     | Метод последовательных<br>приближений для решения ИУ. | Конспект,<br>решение<br>задач | 8  |
| Итого |                                                       |                               | 52 |

### 7. Примерная тематика контрольных работ, курсовых работ

Учебным планом контрольные работы и курсовые работы по дисциплине ФТД.02 «Интегральные уравнения» не предусмотрены.

### 8. Перечень вопросов на промежуточную аттестацию

#### *Примерный перечень вопросов на зачет:*

- Определение интегрального уравнения (ИУ), линейного ИУ, классификация линейных интегральных уравнений. Ядро, свободный член ИУ, требования к ядру и свободному члену. Примеры физических задач, приводящих к интегральным уравнениям (к уравнению Вольтерра и уравнению Фредгольма).
- Сведение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения  $n$ -порядка к уравнению Вольтерра II рода.
- Интегральное уравнение Фредгольма II рода. Собственные значения и собственные функции ядра интегрального уравнения. Операторная форма интегрального уравнения. Аналогия между линейным интегральным уравнением и системой линейных алгебраических уравнений.
- Однородное уравнение Фредгольма II рода с вырожденным ядром. Сведение его решения к решению системы алгебраических уравнений.
- Теорема о конечном числе собственных значений вырожденного ядра (с доказательством).
- Неоднородное уравнение Фредгольма II рода с вырожденным ядром. Сведение такого уравнения к системе алгебраических уравнений. Определитель Фредгольма, сопряженное к данному интегральное уравнение.
- Теорема Фредгольма об альтернативе (с доказательством).
- Вторая теорема Фредгольма (случай, когда однородное уравнение имеет только тривиальное решение) (с доказательством).
- Третья теорема Фредгольма (случай, когда однородное уравнение имеет нетривиальное решение) (с доказательством).

- Теорема об одинаковом числе линейно независимых решений однородного и сопряженного к нему интегральных уравнений (с доказательством). Нахождение комплексного решения интегрального уравнения в случае комплексного ядра и свободного члена.
- Определение интегрального уравнения (ИУ), линейного ИУ, классификация линейных интегральных уравнений. Ядро, свободный член ИУ, требования к ядру и свободному члену. Примеры физических задач, приводящих к интегральным уравнениям (к уравнению Вольтерра и уравнению Фредгольма).
- Сведение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения  $n$ -порядка к уравнению Вольтерра II рода.
- Интегральное уравнение Фредгольма II рода. Собственные значения и собственные функции ядра интегрального уравнения. Операторная форма интегрального уравнения. Аналогия между линейным интегральным уравнением и системой линейных алгебраических уравнений.
- Однородное уравнение Фредгольма II рода с вырожденным ядром. Сведение его решения к решению системы алгебраических уравнений.
- Теорема о конечном числе собственных значений вырожденного ядра (с доказательством).
- Неоднородное уравнение Фредгольма II рода с вырожденным ядром. Сведение такого уравнения к системе алгебраических уравнений. Определитель Фредгольма, сопряженное к данному интегральное уравнение.
- Теорема Фредгольма об альтернативе (с доказательством).
- Вторая теорема Фредгольма (случай, когда однородное уравнение имеет только тривиальное решение) (с доказательством).
- Третья теорема Фредгольма (случай, когда однородное уравнение имеет нетривиальное решение) (с доказательством).
- Теорема об одинаковом числе линейно независимых решений однородного и сопряженного к нему интегральных уравнений (с доказательством). Нахождение комплексного решения интегрального уравнения в случае комплексного ядра и свободного члена.
- Метод последовательных приближений для решения интегрального уравнения.
- Теорема о существовании и единственности решения интегрального уравнения в случае достаточной малости параметра  $\lambda$  (с доказательством на основании теоремы о неподвижной точке оператора).
- Резольвента интегрального уравнения. Свойства резольвенты.
- Резольвента интегрального уравнения в случае вырожденного ядра.
- Случай ядра интегрального уравнения, близкого к вырожденному. Сведение интегрального уравнения с таким ядром к уравнению с вырожденным ядром.
- Уравнение Вольтерра II рода. Теорема об отсутствии собственных значений уравнения Вольтерра II рода.
- Нахождение решения уравнения Вольтерра II рода методом последовательных приближений.
- Резольвента уравнения Вольтерра II рода, повторные ядра для этого случая.
- Интегральные уравнения Вольтерра I и II рода. Связь между ними.
- Интегральное уравнение Фредгольма II рода с симметричным ядром. Свойства собственных значений и собственных функций такого ядра. Формула Шмидта для решения уравнения с симметричным ядром.



## 9. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### 9.1. Основная учебная литература:

- Скопин В.А. Функциональный анализ и интегральные уравнения : методические указания к самостоятельной работе / Скопин В.А., Седых И.А.. — Липецк : Липецкий государственный технический университет, ЭБС АСВ, 2012. — 17 с. — ISBN 2227-8397. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/55174.html> (дата обращения: 14.03.2021). — Режим доступа: для авторизир. пользователей
- Лошкарев А.И. Интегральные преобразования и операционное исчисление : методические указания к выполнению домашнего задания / Лошкарев А.И., Облакова Т.В.. — Москва : Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, 2007. — 74 с. — ISBN 2227-8397. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/31410.html> (дата обращения: 14.03.2021). — Режим доступа: для авторизир. пользователей

### 9.2. Дополнительная учебная литература:

Краснов М.Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Интегральные уравнения: Задачи и примеры с подробными решениями: Учебное пособие. Изд. 3-е, испр. - М.: Едиториал УРСС, 2003. - 192 с.

### 9.3. Интернет-ресурсы:

- Научная электронная библиотека Elibrary.ru – <http://elibrary.ru>
- Математический портал Math-Net – <http://mathnet.ru>
- Академия Google - <https://scholar.google.ru/>
- видеолекции на канале Постнаука youtube.com

## 10. Формы и критерии оценивания учебной деятельности студента

На основании разработанной компетентностной модели выпускника образовательные цели представлены в виде набора компетенций как планируемых результатов освоения образовательной программы. Определение уровня достижения планируемых результатов освоения образовательной программы осуществляется посредством оценки уровня сформированности компетенции и оценки уровня успеваемости обучающегося по пятибалльной системе («отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно», «зачтено», «не зачтено»).

Основными критериями оценки в зависимости от вида работы обучающегося являются: сформированность компетенций (знаний, умений и владений), степень владения профессиональной терминологией, логичность, обоснованность, четкость изложения материала, ориентирование в научной и специальной литературе.

Критерии оценивания уровня сформированности компетенций и оценки уровня успеваемости обучающегося

### Текущий контроль

|         |         |                                                       |
|---------|---------|-------------------------------------------------------|
| Уровень | Уровень | Критерии оценивания отдельных видов работ обучающихся |
|---------|---------|-------------------------------------------------------|

| сформированности компетенции | освоения модулей дисциплины (оценка) | Устный/письменный опрос                                                                          | Отчет по практической работе                                                              | Выполнение заданий самостоятельной работы                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Высокий                      | отлично                              | Обучающийся ответил на все вопросы и продемонстрировал полноту знаний по изучаемому материалу    | Содержит все задания лабораторной работы, оформлен в соответствии с требованиями          | Студент безошибочно ответил на все основные вопросы, а также продемонстрировал свободное владение материалом при ответе на дополнительные вопросы; работа выполнена в полном объеме и в точном соответствии с требованиями; студент свободно владеет теоретическим материалом, безошибочно применяет его при решении задач, сформулированных в задании                                                                              |
| Базовый                      | хорошо                               | Обучающийся ответил на большую часть вопросов и продемонстрировал понимание изучаемого материала | Содержит большинство заданий лабораторной работы, оформлен в соответствии с требованиями  | Студент безошибочно ответил на основные вопросы, но не точно или не в полном объеме раскрыл дополнительные вопросы; работа выполнена в полном объеме и в точном соответствии с требованиями; студент твердо владеет теоретическим материалом, может применять его самостоятельно или по указанию преподавателя                                                                                                                      |
| Пороговый                    | удовлетворительно                    | Ответ обучающегося содержал ошибки и недочеты                                                    | Содержит меньшую часть заданий лабораторной работы, оформлен не соответствует требованиям | Студент затрудняется в ответах на вопросы и отвечает только после наводящих вопросов, демонстрирует слабое знание при ответе на дополнительные вопросы; работа выполнена в основном правильно, но без достаточно глубокой проработки некоторых разделов; студент усвоил только основные разделы теоретического материала и по указанию преподавателя применяет его практически; на вопросы отвечает неуверенно или допускает ошибки |
| Компетенции не сформированы  | неудовлетворительно                  | Обучающийся не ответил на поставленные вопросы                                                   | Отчет не предоставлен                                                                     | Студент не ответил ни на один вопрос; работа не выполнена                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |

### Промежуточная аттестация

| Уровень сформированности компетенции и | Уровень освоения дисциплины      | Критерии оценивания обучающихся (работ обучающихся)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|----------------------------------------|----------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                        |                                  | Высокий                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| Базовый                                | хорошо (зачтено)                 | Студент твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности                                                                                                                                                                                        |
| Пороговый                              | удовлетворительно (зачтено)      | Студент показал фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации |
| Компетенции не сформированы            | неудовлетворительно (не зачтено) | Студент не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач                                                                                                                                   |

## 11. Материально-техническая база

Аудитория вместимостью не менее 20 человек для лекционных и практических занятий, компьютеры с установленным программным обеспечением Maple, а также оснащенный современными средствами воспроизведения и визуализации любой видео и аудио информации (проектор), получения и передачи электронных документов.